Érettségi feladatsorok

Középszint

1. feladatsor

I. rész (10 feladat, 30 pont):

1. $A = \{10, 20, 30, \dots, 90\}$, $B = \{0, 3, 6, \dots\}$.
a) $A \cap B = \{30, 60, 90\}$;
b) $A \setminus B = \{10, 20, 40, 50, 70, 80\}$.

2. Ha B jelöli a tervezett bevételt, akkor az új bevétel $B \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}08 = 1{,}026B$. A növekedés 2,6%-os volt.

3. $B = 2^6 \cdot 5^4 \cdot 7^5$, így:
a) a legnagyobb közös osztó: $(A, B) = 2^5 \cdot 5^4$;
b) a legkisebb közös többszörös: $[A, B] = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5$.

4. *a)* A módusz 6;
b) a medián 4;
c) az átlag $\dfrac{11 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 19 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 28 \cdot 6}{100} = 3{,}86$.

5. $-8 \le x - 3 \le 8$, innen $-5 \le x \le 11$.

6. *a)* Hamis. Ellenpélda a (nem speciális) húrtrapéz.
b) Igaz. Ez az egyik lehetséges definíció.
c) Igaz. Az egyenlő átlójú paralelogramma a téglalap.

7. A turista 1,5 óra alatt 4,5 km-t tesz meg, tehát átlagsebessége 3 km/óra. 2 óra 45 perc alatt 8,25 km-t tesz meg, így 10 óra 45 perckor céljától 7,75 km távolságra lesz.

8. A két szélsőhelyzetben egyforma színű golyókat húzunk ki. Annak valószínűsége, hogy a negyedik húzásra piros golyót húzunk, legalább 0,2 és legfeljebb 0,5.

9. Ha $x = 0$, akkor $y = \log_2 3$; ha $y = 0$, akkor $\log_2 (x + 3) = 0$-ból $x = -2$. A metszéspontok: $(0; \log_2 3)$, illetve $(-2; 0)$.

10. Az egyenlő szárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot. Pitagorasz tételéből a homlokzat m magasságára $m^2 = 5^2 - 3^2$, innen $m = 4$ (m). A felületet t-vel, a háztető síkja és a talaj hajlásszögét φ-vel jelölve
a) $t = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12\ (\mathrm{m}^2)$;
b) $\sin\varphi = 0{,}8$, innen $\varphi \approx 53{,}1°$. (φ csak hegyesszög lehet.)

II./a rész (3 feladat, 36 pont):

11. *a)* $h(0) = 25$ méter.

b) h maximális, ha $t = \dfrac{-20}{2\cdot(-5)} = 2$; ekkor a magasság $h(2) = 45$ méter.

c) A földre érkezés ideje a $-5t^2 + 20t + 25 = 0$ egyenletből számítható ki. Innen $t_1 = -1$ hamis gyök, $t_2 = 5$ a keresett megoldás. $t \in [0; 5]$.

12. *a)* $2310 - (382 + 1661 + 204) = 63$ (darab).

b) $301 + 1680 + 65 + 198 = 2244$ (darab).

c) $\dfrac{301}{382} \approx 0{,}788$, a kiadott verses művek, illetve antológiák száma 21,2%-kal csökkent.

d) $\dfrac{1680}{2244} \approx 0{,}749$, tehát 2002-ben az összes kiadott mű 74,9%-a volt regény.

e) Az „egyéb széppróza” kategóriába sorolható művek 2002-es példányszáma $12\,229 - (396 + 11\,150 + 188) = 495$ (ezer darab). Az átlagos példányszám az egyes műfajok szerint rendre 1316, 6637, 2892, 2500, tehát a regényeket adták ki a legnagyobb átlagos példányszámban. A teljes táblázat a következő:

műfaj	2001	2002	példányszám (2002, ezer darab)	átlagos példányszám (2002)
verses mű, antológia	382	301	396	1316
regény, elbeszélés	1661	1680	11 150	6637
színmű	63	65	188	2892
egyéb széppróza	204	198	495	2500
összesen:	2310	2244	12 229	5450

13. Az AB szakasz felezőpontja $\vec{F} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = (1; 4)$, az AF szakasz hossza $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. A keresett k kör középpontja F, sugara $r = 5$, innen egyenlete k: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$.

A metszéspontokat az

(1) $y = x$,

(2) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$

egyenletrendszer megoldásai adják. (1)-et (2)-be helyettesítve $x^2 - 5x - 4 = 0$, innen $x_1 \approx 5{,}70$, $x_2 \approx -0{,}70$, a metszéspontok: $M(5{,}70; 5{,}70)$, $N(-0{,}70; -0{,}70)$.

$MN \approx \sqrt{2} \cdot 6{,}4 = 9{,}05$.

II./b rész (2 feladat, 34 pont):

14. *a)* A háromszög területe $t = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2}$, innen $\sin\beta \approx 0{,}348$, $\beta_1 = 20{,}4°$, $\beta_2 = 159{,}6°$. A koszinusztételből $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta$, ebből $AC = 8{,}73$ cm vagy $AC = 47{,}24$ cm.

b) A leghosszabb magasság a legrövidebb oldalhoz tartozik. Az első esetben $m_b = \frac{2t}{AC} = 22{,}91$ cm, a második esetben $m_c = \frac{2t}{AB} = 8{,}70$ cm.

c) Az általános szinusztételből $R = \frac{AC}{2\sin\beta}$, így $R = 25{,}09$ cm vagy $R = 135{,}75$ cm.

15. Az első esetben 12 évig tart a törlesztés, s ezalatt
$12 \cdot 12 \cdot 19\,000 = 2\,736\,000$ Ft-ot fizetünk vissza.
A második esetben a havi kamat 0,5%, az adósságunk
az első hónap végén $2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005 - 2 \cdot 10^4$ Ft;
a második hónap végén $2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^2 - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005 - 2 \cdot 10^4$ Ft;
a harmadik hónap végén $2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^3 - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005^2 - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005 - 2 \cdot 10^4$ Ft;
…
az n. hónap végén
$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^n - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005^{n-1} - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005^{n-2} - \ldots - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005 - 2 \cdot 10^4$ Ft.
Ha a teljes visszafizetés n hónapig tart, akkor
$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^n - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005^{n-1} - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005^{n-2} - \ldots - 2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}005 - 2 \cdot 10^4 = 0$.
A mértani sorozat összegképletét alkalmazva ekvivalens átalakításokkal
$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^n - 2 \cdot 10^4 \cdot (1{,}005^{n-1} + 1{,}005^{n-2} + \ldots + 1{,}005 + 1) =$
$= 2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^n - 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1{,}005^n - 1}{1{,}005 - 1} = 2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^n - 4 \cdot 10^6 \cdot (1{,}005^n - 1) =$
$= 1{,}005^n(2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6) + 4 \cdot 10^6 = 0$, ebből kapjuk, hogy $1{,}005^n = 2$. Innen $n = \log_{1{,}005} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}005} = 138{,}98$, tehát 139 hónapig (11 év 7 hónap) fizetjük a törlesztést, és a teljes visszafizetett összeg $139 \cdot 20\,000 = 2\,780\,000$ Ft.

16. $\sin(2x) \neq 0$. $\sin(2x)$-szel való szorzás után $\sin^2(2x) - \sin(2x)\cos(2x) = 1$, innen $\cos^2(2x) = \cos(2x)\sin(2x)$.
Ha $\cos(2x) = 0$, akkor $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, s innen $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. (Ekkor $\sin(2x) \neq 0$.)
Ha $\cos(2x) \neq 0$, akkor $\sin(2x) = \cos(2x)$, s innen $2x = \frac{\pi}{4} + m\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.
Mindkét megoldás kielégíti az eredeti egyenletet.

2. feladatsor

I. rész (10 feladat, 30 pont):

1. $1201_3 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 = 46.$

2. *a)* $X \cdot Y = 15 \cdot 10^{-10} = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$;

b) $\dfrac{X}{Y} = 0{,}6 \cdot 10^{290} = 6 \cdot 10^{289}$.

3. *a)* A medián 4;

b) a módusz 5;

c) az átlag $\dfrac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 11 \cdot 5}{30} = 3{,}7.$

4. *a)* Igaz; 4 és 5 relatív prímek.

b) Hamis; 4 és 6 nem relatív prímek. Egy ellenpélda a 12.

c) Igaz. Ha a szám alakja $24k$ ($k \in \mathbf{N}$), akkor a szám felírható $4 \cdot (6k)$ és $6 \cdot (4k)$ alakban is.

5. $\dfrac{1111 - 1}{2} = 555$, az összeg 556 tagú. A számtani sorozat összegképletét alkalmazva

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 1111 = \frac{(1 + 1111) \cdot 556}{2} = 556^2 = 309\,136.$$

Megjegyzés: Közvetlenül is alkalmazható az első n páratlan természetes szám összegére vonatkozó tétel (mely szerint ezek összege az n. négyzetszám).

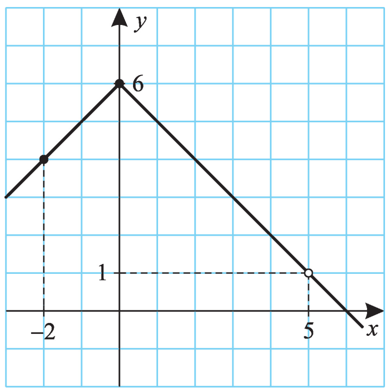
6. $\alpha_1 \approx 23{,}58°$, $\alpha_2 \approx 156{,}42°$.

7. A szám végződése 00, 25, 50, 75 lehet. Az egyes esetekben az első három számjegyet – a feladat feltételeinek megfelelően – rendre 0, $7 \cdot 7 \cdot 6$, $8 \cdot 7 \cdot 6$, illetve $7 \cdot 7 \cdot 6$-féleképpen választhatjuk, így a keresett számokból összesen $294 + 336 + 294 = 924$ darab van.

8. A 20. tag $\dfrac{2}{81} \cdot 3^8 = 2 \cdot 3^4 = 162.$

9. A függvény grafikonja:

9.



Az értékkészlet]1; 6].

10. Az egyenes meredeksége $m = \dfrac{9-3}{1-(-2)} = 2$, az egyenlete e: $y = 2x + 7$.

II./a rész (3 feladat, 36 pont):

11. Legyen az $ABCD$ deltoidban $B\sphericalangle = D\sphericalangle$.

a) Ha a deltoid trapéz, akkor pl. az AB és CD oldalak párhuzamosak, $A\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$ egymást 180°-ra egészíti ki. Mivel $B\sphericalangle = D\sphericalangle$, így $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ is kiegészítő szögek, ezért az AD és BC oldalak is párhuzamosak. Ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor a négyszög paralelogramma, így $A \cap B = \{\text{paralelogrammák}\}$.

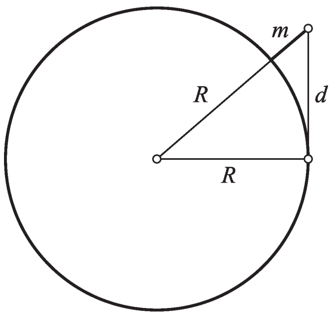
b) A húrnégyszögek szemközti szögeinek összege 180°, így $B \cap C$ a derékszögű deltoidok halmaza (vagyis olyan deltoidoké, melynek szemközti egyenlő szögei derékszögek).
Vagy másképpen: $B \cap C$ olyan húrnégyszögek halmaza, melyeknek tükörtengely átlója egyúttal a körülírt kör átmérője is.

c) $A \cap C = \{\text{húrtrapézok}\}$ vagy $A \cap C = \{\text{szimmetrikus trapézok}\}$.

12. A feladatot az $a = 2^x$ helyettesítéssel másodfokú egyenlet megoldására vezethetjük vissza.
$a \neq 3$. $4a + \dfrac{5}{a-3} = 41 - a$, innen $5a^2 - 56a + 128 = 0$. Az egyenlet megoldása $a_1 = 3{,}2$, $a_2 = 8$. Az exponenciális egyenlet szigorú monotonitása miatt $x_1 = \log_2 3{,}2 \approx 1{,}68$, $x_2 = 3$.

13. Jelöljük a Föld sugarát R-rel, a torony magasságát m-mel, a látótávolságot d-vel (ábra).

13.



a) Pitagorasz tételéből $(R+m)^2 - R^2 = d^2$, innen $d = \sqrt{2Rm + m^2} \approx 17{,}8$ km.
b) $d \approx 19{,}5$ km.

II./b rész (2 feladat, 34 pont):

14. *a)* A másik csapat négy tagja a 7 fiúból kerül ki. A kiválasztott fiúk sorrendjére nem vagyunk tekintettel, így a másik csapat $\binom{7}{4} = 35$-féleképpen állítható össze.

b) A lányokat háromféleképpen oszthatjuk ketté. (Most számít a két csapat sorrendje; feltehetjük pl., hogy a legjobban játszó lány mindig az első csapatban van.) Az első csapathoz $\binom{7}{2}$, a másikhoz $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk ki a fiúkat. Eredmény: $3 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 630$.

Másik megoldási lehetőség: az I. csapatba $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2}$, a II-ba $\binom{2}{2} \cdot \binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk a tagokat. A két csapat tagjait fel is cserélhetjük, így az eredmény $\dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{5}{2}}{2} = 630$.

c) Ha kiválasztunk 4 játékost, akkor egyúttal a másik csapatot is meghatároztuk. Eredmény: $\dfrac{\binom{8}{4}}{2} = 35$.

15. Ábrázoljuk a csonkakúp alaplapra merőleges fél-síkmetszetét!

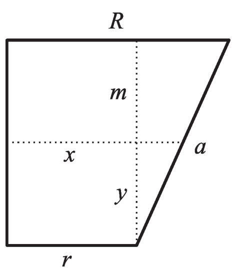
a) A csonkakúp térfogata

$V = \dfrac{\pi}{3} m (R^2 + r^2 + Rr)$, innen

$m = \dfrac{3V}{\pi (R^2 + r^2 + Rr)} \approx 11{,}17$ cm.

b) A felület $F = \pi(r^2 + (R + r)a)$, ahol a az alkotó hossza. Pitagorasz tételéből $a^2 = m^2 + (R - r)^2$, innen $a \approx 11{,}27$ cm, és $F \approx 293{,}82$ cm^2.

15.



c) Ha a tejföl magasságát y, „fedőkörének” sugarát x jelöli, akkor a megfelelő derékszögű háromszögek hasonlósága és a térfogatok egyenlősége miatt

(1) $\dfrac{x - r}{y} = \dfrac{R - x}{m - y} = \dfrac{R - r}{m}$,

(2) $\dfrac{\pi}{3} y (r^2 + x^2 + rx) = \dfrac{\pi}{3} (m - y)(R^2 + x^2 + Rx)$.

(2)-t átalakítva $\dfrac{y}{m - y} = \dfrac{R^2 + x^2 + Rx}{r^2 + x^2 + rx}$, a bal oldalt

(1)-ből kifejezve $\frac{x-r}{R-x} = \frac{R^2+x^2+Rx}{r^2+x^2+rx}$. Innen $x^3 - r^3 = R^3 - x^3$,

$x = \sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}} = 3{,}89$ (cm).

A tejföl magassága (1)-ből $y = \frac{m(x-r)}{R-r} = 6{,}65$ (cm).

16. Kikötések: $x+8>0$, $y+4>0$, $x>0$ és $-2y>0$; összesítve $x>0$ és $-4<y<0$.

$5 = \log_2 32$, így (2)-ből $-2xy = 32$. $3 = \log_2 8$, így (1)-ből $\frac{x+8}{y+4} = 8$. Az egyenletekből x-et kifejezve $y^2 + 3y + 2 = 0$, innen $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, s ekkor $x_1 = 16$, $x_2 = 8$. A $(16; -1)$ és $(8; -2)$ számpár egyaránt megoldása az eredeti egyenletrendszernek.

3. feladatsor

I. rész (10 feladat, 30 pont):

1. $A = 50 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{3}{4} = 15$ (km), $B = 1{,}6 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{18}{5} = 14{,}4$ (km). $A > B$, vagyis 50 kilométer 40 százalékának a háromnegyede a nagyobb.

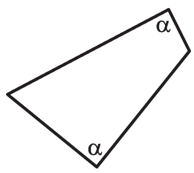
2. $666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$, a keresett szám $2 \cdot 37 = 74$.

3. Egy pozitív számlálójú tört negatív, ha a nevezője negatív. (A tört nulla nem lehet.) Megoldás: $x > 7$.

4. A számjegyek összege 15, a szám mindig osztható 3-mal. Az utolsó helyiértéken 2 vagy 4 állhat. Az 5 egyformán valószínű lehetőségből 2 felel meg, a keresett valószínűség $\frac{2}{5}$.

5. *a)* Hamis, egy ellenpélda az ábrán látható négyszög.
b) Igaz. Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma; ennek szemközti oldalai egyenlők, s a deltoid tulajdonsága miatt ez a szomszédos oldalakra is igaz. (Tehát ha egy négyszög deltoid és paralelogramma, akkor rombusz is.)
c) Hamis; a konkáv deltoid általában nem bontható fel.

5.

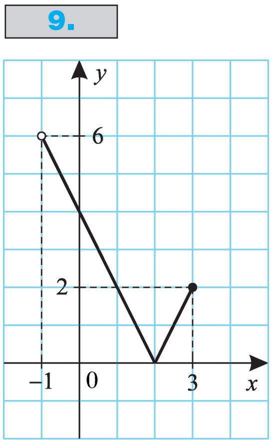


6. A 100. tag $-3 + 88 \cdot 4 = 349$.

7. A HBC háromszög területe $\frac{2}{3}$-a az ABC területének; a HBN háromszög területe $\frac{1}{4}$-e a HBC területének. Innen $T_{HBN} = 10$ cm^2, $T_{AHNC} = 50$ cm^2.

8. A havi kamat $\frac{9}{12} = 0{,}75\%$. Egy év alatt $1\,000\,000 \cdot 1{,}0075^{12} \approx 1\,093\,807$ Ft-ra emelkedik az összeg.

9.



Az értékkészlet [0; 6[.

10. Ha a két szög egybeesik (a köztük lévő esetleges periódustól eltekintve), $x = 2x + k \cdot 360°$, $k \in \mathbf{Z}$. Innen $x_1 = 0°$, $x_2 = 360°$.
Ha a két szög 180°-ra egészíti ki egymást (a periódustól eltekintve), akkor $2x = 180° - x + m \cdot 360°$, $m \in \mathbf{Z}$. Innen $x = 60° + m \cdot 120°$, $x_3 = 60°$, $x_4 = 180°$, $x_5 = 300°$.

II./a rész (3 feladat, 36 pont):

11. *a)* Ha a bezárt szöget φ jelöli, akkor a trigonometrikus területképletből
$$\frac{450 \cdot 410 \cdot \sin\varphi}{2} = 5{,}8 \cdot 10^4,$$ innen $\sin\varphi = 0{,}629$, $\varphi_1 \approx 39°$, $\varphi_2 \approx 141°$.

b) Ha a harmadik oldal hossza c, akkor a koszinusztételből
$c^2 = 450^2 + 410^2 - 2 \cdot 450 \cdot 410 \cdot \cos\varphi$. Innen $c_1 = 289{,}5$ m; $c_2 = 810{,}8$ m.

12. *a)* $f(2) = 44{,}8$ °C.
b) $f(-1) = 87{,}5$ °C.
c) $70 \cdot 0{,}8^t = 90$, innen $t = \log_{0,8} \frac{9}{7} \approx -1{,}13$; $70 \cdot 0{,}8^t = 10$, innen
$t = \log_{0,8} \frac{1}{7} \approx 8{,}72$. Ennyi idő után a termoszban lévő tea átveszi a környezet hőmérsékletét, tehát $t \in [-1{,}13; 8{,}72]$. Ezen az intervallumon írja le (közelítőleg) az f függvény a tea hőmérsékletét.

13. $3x^2 + 2x - 1 \geq 2x^2 - 3x + 5$, ha $x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Az $x^2 + 5x - 6 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = 1$, $x_2 = -6$. Az egyenlőtlenség megoldása $x \leq -6$ vagy $1 \leq x$.

II./b rész (2 feladat, 34 pont):

14. Az A-ból induló autó t idő múlva az $\vec{A} + t \cdot (2; 1) = (-7 + 2t; 2 + t)$ pontban lesz. $\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (8; 9) - (2; -9) = (6; 18)$, tehát a B-ből induló autó $\mathbf{v_b}$ sebességvektora $(v; 3v)$ alakú. Mivel a sebesség nagysága $\sqrt{40}$, $\mathbf{v_b} = (2; 6)$. A B-ből induló autó t idő múlva a
$\vec{B} + (t - 2) \cdot (2; 6) = (2t - 2; 6t - 21)$ pontban lesz, ha $t \ge 2$.

a) $t = 11$ esetén az autók helyzete $(15; 13)$, illetve $(20; 45)$.

b) t idő elteltével a két autó távolságának négyzete $5^2 + (5t - 23)^2 = 25t^2 - 230t + 554$. Ez minimális, ha $t = \frac{230}{2 \cdot 25}$, vagyis ha $t = 4{,}6$. (A minimális távolság $\sqrt{25 \cdot 4{,}6^2 - 230 \cdot 4{,}6 + 554} = 5$ egység.)

15. *a)* Ha a dobott 5-ösök száma x, akkor a 2-esek száma $2x$. Az átlag $\frac{5 \cdot 1 + 2x \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + x \cdot 5 + 9 \cdot 6}{35 + 3x} = 3{,}58$, innen $x = 5$. Tehát 5 darab 5-öst és 10 darab 2-est dobtunk.

b) A 4-es érték relatív gyakorisága $\frac{12}{50} = 0{,}24$.

c) A medián és a módusz is 4.

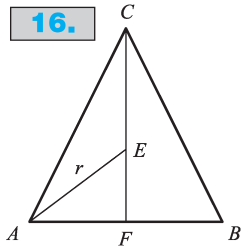
d) A $D^2(a) = D^2(x) - (x - a)^2$ összefüggést alkalmazzuk, $x = 4$ esetére. (Az átlag $a = 3{,}58$.) $5 \cdot (4 - 1)^2 + 10 \cdot (4 - 2)^2 + 9 \cdot (4 - 3)^2 + 5 \cdot (4 - 5)^2 + 9 \cdot (4 - 6)^2 = 45 + 40 + 9 + 5 + 36 = 135$, $D^2(4) = \frac{135}{50} = 2{,}7$. A szórásnégyzet tehát $D^2(a) = 2{,}7 - (4 - 3{,}58)^2 = 2{,}5236$, a szórás közelítő értéke $D(a) = 1{,}589$.

16. *a)* Az ABC háromszög C csúcsból kiinduló CF magassága Pitagorasz tételéből $m_c = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - 4^4} = 8$ cm. Az ABC háromszög területe $t = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32\ \text{cm}^2$, a gúla térfogata $V = \frac{t \cdot m}{3} = 128\ \text{cm}^3$.

b) Ha a gúla D csúcsból húzható testmagasságának talppontját E-vel jelöljük, akkor az AED, BED, CED háromszögek egybevágók (megegyezik két oldaluk és a nagyobbik oldallal szemközti derékszögük). Ezért $AE = BE = CE$, vagyis E az ABC háromszög köré írt kör középpontja (ábra).

Jelöljük a körülírt kör sugarát r-rel! Ekkor az AFE derékszögű háromszögben $r^2 = AF^2 + (m_c - r)^2$, innen $r = 5$ cm. A gúla AD oldaléle az AED derékszögű háromszög átfogója, így $AD = \sqrt{r^2 + m^2} = 13$. A három oldalél hossza 13 cm.

16.



4. feladatsor

1. Az $A \setminus B$ halmaznak 11 eleme van.

2. $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, tehát a két szám egyenlő.

3. $\frac{n(n-1)}{2} = 21$, ahonnan $n = 7$. Tehát a házibulin 7-en vettek részt.

4. Ha $x = -4$, akkor $y = 8 + 6 = 14$. Tehát a kérdéses pont az x tengelytől 14 egység távolságra van.

5. $TAB\sphericalangle = 90° - 84° = 6°$, így $\varphi = 76° - 6° = 70°$.

6. *a)* $x + 1 = 4$, $x = 3$, *b)* $x - 1 = 4$, $x = 5$, *c)* $1 - x = 4$, $x = -3$.

7. $Y = 0$, és a számjegyek összegének oszthatónak kell lennie 3-mal, vagyis $X = 2, 5$ vagy 8.

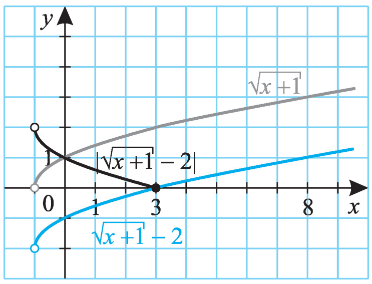
8. A henger magassága $m = 16$ cm. A felszíne:
$A = 2 \cdot 8^2\pi + 2 \cdot 8\pi \cdot 16 = 384\pi \approx 1206{,}4$ (cm^2).

9. *a)* hamis, *b)* hamis, *c)* igaz.

10. A nők száma: $1260 \cdot 0{,}3 = 378$. Így a felnőttek száma: $378 + 386 = 764$. Tehát a kiskorúak száma: $1260 - 764 = 496$.

11.

11.



12. *a)* $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, tehát a sorozat differenciája: $d = 4$. Az első 100 elem összege:

$$S_{100} = \frac{(-2 + 99 \cdot 4) \cdot 100}{2} = 19\,700.$$

b) $100 \le -1 + (n-1) \cdot 4 \le 999 \quad \rightarrow \quad 27 \le n \le 251$.

Tehát a sorozatnak 225 háromjegyű tagja van.

13. *a)* $50 + 40 + 22 = 112$, $14 + 8 = 22$, $\frac{22}{112} \cdot 100 = 19{,}64\%$.

b) 1 év múlva a rendszeresen dohányzók száma: 33, a ritkán: 64, a soha: 15.

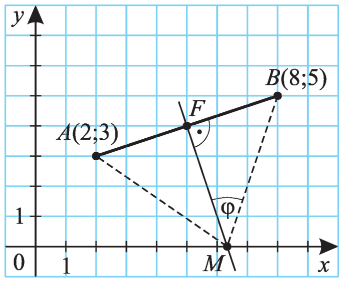
$$\frac{15}{33} \cdot 100 = 45{,}45\%.$$

14. *a)* $HB = \frac{3}{4}\mathbf{a} - \mathbf{b}$, *b)* $GA = -\frac{3}{4}\mathbf{a} - \mathbf{b}$,

c) $FH + BE = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{3}{4}\mathbf{a} + \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} =$

$= \frac{3}{2}\mathbf{b} - \frac{5}{4}\mathbf{a}$.

15.



15. *a)* Az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az x tengelyből a keresett M pontot (ld. *ábra*). Az AB szakasz F felezőpontja: $F(5; 4)$.

Az AB szakasz egy irányvektora: $\mathbf{v}_{AB}(6; 2)$. Ez egyben a felezőmerőleges egy normálvektora. A felezőmerőleges egyenlete: $3x + y = 19$.

Ez az egyenes ott metszi az x tengelyt, ahol $y = 0$, azaz $x = \frac{19}{3}$.

Tehát a buszmegállót az $M\left(\frac{19}{3}; 0\right)$ pontba kell helyezni.

b) $MA = MB = \sqrt{\left(\frac{19}{3} - 2\right)^2 + 3^2} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$.

A megépítendő út: $\frac{10\sqrt{10}}{3} \approx 10{,}541$ km. Ennek költsége:
$10{,}541 \cdot 2{,}6 \approx 27{,}4$ mFt. Tehát az önkormányzatnak
$27{,}4 - 18{,}2 = 9{,}2$ mFt állami támogatást kell kérnie.

c) $FB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$. Az FMB derékszögű háromszögben:

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{10}}{\frac{5\sqrt{10}}{3}} = 0{,}6 \rightarrow \varphi \approx 36{,}9°$.

Tehát a buszmegállóból a két falut összekötő szakasz kb. 73,8°-os szögben látszik.

16. *a)* $-x^2 + 16x - 39 \geq 0 \rightarrow 3 \leq x \leq 13$.

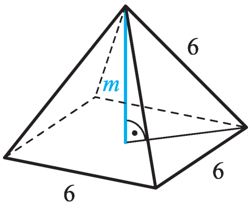
b) Az értelmezési tartományban 11 egész szám van. A köztük levő prímszámok vagy négyzetszámok: 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13.

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{7}{11} \approx 0{,}\dot{6}\dot{3}$.

c) $-x^2 + 16x - 39 = ... = -(x - 8)^2 + 25$.

Tehát $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-(x-8)^2 + 25}}$. A nevező értéke 5, vagy annál kisebb pozitív valós szám, így az értékkészlet: $f(x) \geq \frac{1}{5}$.

17.



17. *a)* A vízszint emelkedése egy olyan henger magasságával egyenlő, melynek sugara 12 cm, és térfogata egyenlő a három gúla térfogatának összegével. Egy tetraéder m magassága:

$$m=\sqrt{6^2-\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}.$$

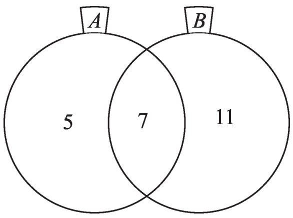
A gúlák térfogata: $3V=3\cdot\dfrac{6^2\cdot 3\sqrt{2}}{3}\approx 152{,}7\ \text{cm}^3$.

Ha a vízszintemelkedés x, akkor $12^2\cdot\pi\cdot x=152{,}7$, ahonnan $x\approx 0{,}3376$ cm.

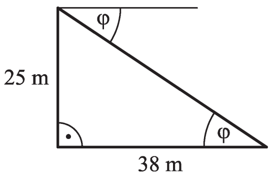
b) Egy gúla felszíne: $4\cdot\left(6^2+4\cdot\dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}\right)\approx 393{,}4\ \text{cm}^2$. Tehát a festéshez összesen: $\dfrac{393{,}4}{54}\approx 7{,}285$, azaz 8 doboz festékre lesz szükség.

5. feladatsor

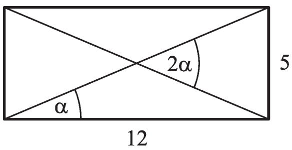
2.



3.



9.



1. $0{,}6\cdot 0{,}2\cdot x=460\ \rightarrow\ x=3833{,}\dot{3}$

2. Az $A\cup B$ halmaznak 23 eleme van.

3. Az *ábra* alapján: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{25}{38}\quad \varphi\approx 33{,}34°$

4. $\dfrac{180°-72°}{2}=54°$. A keresett szög: $\alpha=180°-54°=126°$.

5. $2\cdot 3!=12$.

6. A téglalap kerületének harmadolásával kapjuk a háromszög oldalát.

7. Prímek vagy négyzetszámok: 1, 2, 3, 4, 5. A keresett valószínűség: $\dfrac{1}{6}$.

8. AB felezőpontja: $F(4;\ -1)$, irányvektora: $(4;\ 6)$. A felezőmerőleges egyik normálvektora $(2;3)$. A felezőmerőleges egyenlete: $2x+3y=5$.

9. Az *ábra* alapján $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5}{12}\ \rightarrow\ \alpha\approx 22{,}62°$, azaz $2\alpha\approx 45{,}24°$.

10. *a)* Lásd az ábrát! *b)* $0 < x < 2$.

11. $9000 + 110A + 610 + 11 = 9621 + 110A$.
Mivel 9621 osztható 9-cel, ezért csak $A = 0$ vagy $A = 9$ lehetséges.

12. *a)* 1. raktár banán: 36,1666 q,
2. raktár banán: 24 q,
$$\frac{24}{36{,}166} \cdot 100 = 66{,}36\%.$$

b) 1. raktár: alma: $\frac{120}{360} \cdot 100 \cdot 124 \approx 41{,}33$ q,
banán: 36,166 q, narancs: 46,5 q.
2. raktár: alma: 60 q, banán: 24 q,
narancs: 60 q.
Össz: alma: 101,33 q, banán: 60,166 q,
narancs: 106,5 q.

c) Alma: $\frac{10\,133 \text{ kg}}{24 \text{ kg}} \approx 422{,}2 \rightarrow 423$ láda

Banán: $\frac{6016 \text{ kg}}{24 \text{ kg}} \approx 250{,}6 \rightarrow 251$ láda

Narancs: $\frac{10\,650 \text{ kg}}{24 \text{ kg}} \approx 443{,}75 \rightarrow 444$ láda.

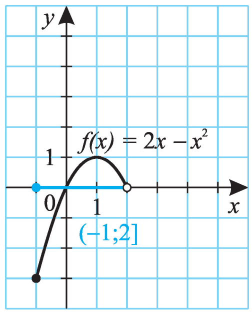
Tehát összesen $423 + 251 + 444 = 1118$ ládára van szükség.

13. *a)* $h + 3h + 10h = 42 \rightarrow h = 3$. Tehát egy kiránduláson 30-an vettek részt.
b) $x + x + 1 + x + 5 - 9 - 6 = 42 \rightarrow x = 17$.
Az 1. kiránduláson 17-en, a másodikon 18-an, a harmadikon 22-en vettek részt.

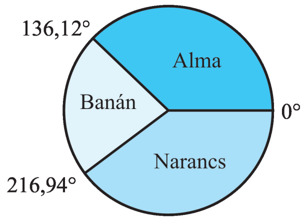
14. *a)* Ha a négyzet oldala x, akkor
$$x^2 = \frac{25^2}{5} = 5^3 \rightarrow x = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$
b) $h = 4 \cdot 25 + 4x + 4y$. Mivel
$25 = x\sqrt{2} + 2y = 5\sqrt{10} + 2y$, így
$$y = \frac{25 - 5\sqrt{10}}{2} \approx 4{,}59. \text{ Tehát}$$
$h \approx 100 + 4 \cdot 11{,}18 + 4 \cdot 4{,}59 \approx 163{,}08$ cm.

15. *a)* Az első egyenletből: $\log_2 \frac{x + y}{x - y} = 2 \rightarrow$
$$\rightarrow \frac{5}{3} y = x.$$

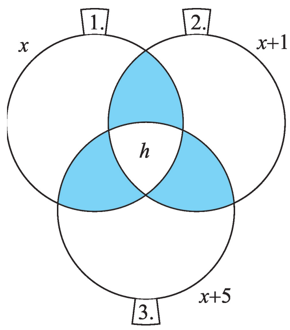
10/a.



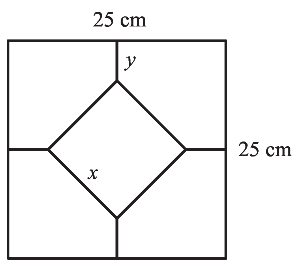
12/b.



13.



14.



Így a második egyenlet: $3y^2 + 10y - 168 = 0 \rightarrow y_1 = -\frac{56}{6}, \quad y_2 = 6.$

Negatív gyök nem lehetséges, így az egyenletrendszer megoldása: $x = 10, \quad y = 6.$

b) Ha van ilyen k, akkor erre

$a_3^2 = a_1 \cdot a_k, \quad$ azaz $\quad 22^2 = 10 \cdot [10 + (k-1) \cdot 6].$

Ennek azonban nem lehet pozitív egész k megoldása, hiszen a jobb oldal 10-zel osztható, míg a bal oldal nem. Tehát nincs ilyen k.

16. *a)* A légtér egy téglatest és egy háromszög alapú hasáb térfogatának összege.

$$V = 6 \cdot 4 \cdot 1,2 + \frac{4 \cdot 2,2}{2} \cdot 6 = 55,2 \ \ \mathrm{m}^3$$

b) A falfelület

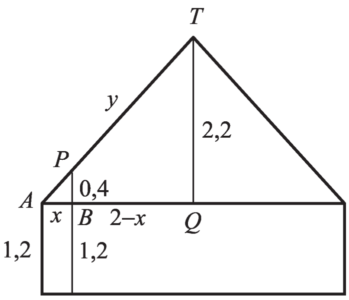
$$A = 2 \cdot 6 \cdot 1,2 + 2 \cdot 4 \cdot 1,2 + 2 \cdot \frac{4 \cdot 2,2}{2} + 2 \cdot 6 \cdot y;$$

$y = \sqrt{2^2 + 2,2^2} \approx 2,973, \quad$ tehát $\quad A \approx 68,476 \ \mathrm{m}^2.$

Ennek 90%-a festendő: $68,476 \cdot 0,9 \approx 61,6284 \ \mathrm{m}^2.$

A szükséges festékmennyiség: $\frac{61,6284}{4,5} \approx 13,69$, azaz 14 vödör.

16/c.



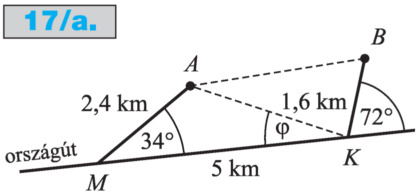
c) Az *ábra* ABP és AQT háromszögei hasonlók.

$\frac{0,4}{2,2} = \frac{x}{2}, \quad$ ahonnan $\quad x = 0,3636.$

A hasznos alapterület:

$2 \cdot 6 \cdot (2 - x) = 19,6363. \ \mathrm{m}^2.$

17/a.



17. *a)* Az *ábra* jelöléseivel:

Alkalmazzuk a koszinusztételt az AMK háromszögre:

$AK^2 = 2,4^2 + 5^2 - 2 \cdot 2,4 \cdot 5 \cdot \cos 34° \rightarrow$

$AK \approx 3,29$ km.

Most alkalmazzuk a szinusztételt az AMK háromszögre:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin 34°} = \frac{2,4}{3,29} \rightarrow \varphi \approx 24° \rightarrow AKB\sphericalangle = 84°.$$

Ismét koszinusztétellel az AKB háromszögre:

$AB^2 = 3,29^2 + 1,6^2 - 2 \cdot 3,29 \cdot 1,6 \cdot \cos 84° \rightarrow AB \approx 3,5$ km.

b) A-ból és B-ből az országútra állított merőlegesek hossza legyen m_1 és m_2.
Ezkkel

$$\sin 34° = \frac{m_1}{2,4} \quad \rightarrow \quad m_1 \approx 1,342 \text{ km},$$

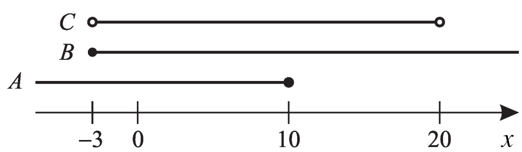
$$\sin 72° \approx \frac{m_2}{1,6} \quad \rightarrow \quad m_2 \approx 1,5217 \text{ km}.$$

Az A falu költsége: $1,342 \cdot 4,6 = 6,1732$ mFt.
A B falu költsége: $1,5217 \cdot 6,6 = 10,04$ mFt.
Tehát a B falu többet fizet az útért.

6. feladatsor

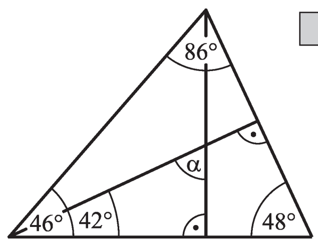
1. $(110\,200 + 98\,600) \cdot 1,12 = 233\,856$ Ft.
2. Ábrázoljuk a halmazokat egy számegyenesen:

2.



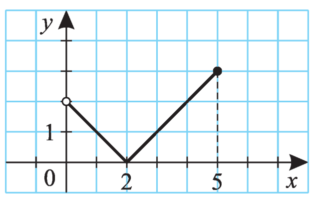
Az $A \cap B \cap C$ almaz elemei: $-3 < x \leq 10$.
3. *a)* igaz, *b)* hamis
4. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$, $r = 5$, a kör kerülete: 10π.
5. Januárban és októberben, novemberben és decemberben.
6. Az *ábra* alapján:

$\alpha = 48°$.



6.

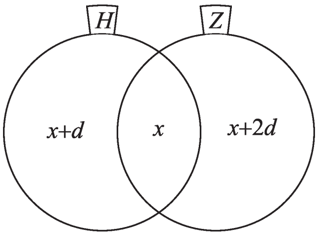
7. $2 \cdot 3! = 12$.
8. $x > 1$. $2x - 2 = 4 \rightarrow x = 3$.
9. *a)* hamis, *b)* hamis, *c)* igaz.
10. $f(x) = |x - 2|$.



10.

11. $a + b = 14,\quad a - b = 2 \;\rightarrow\; a = 8,\; b = 6,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8},\quad \alpha \approx 36{,}87°.$

12/a.



12. *a)* Az *ábra* jelöléseivel:
$x + x + d + x + 2d = 33,\quad x + d = 11$-en csak hegedülnek.

b) Ha $x \geq 5$, akkor $x + d = 11$ miatt $1 < d \leq 6$, így $12 \leq x + 2d \leq 17$. Tehát legalább 12-en, legfeljebb 17-en vannak, akik csak zongoráznak.

13. *a)* A harmadik csúcsnak illeszkednie kell *AB* felezőmerőlegesére, azaz az $y = 4$ egyenesre. Így a harmadik csúcs az $y = 4$ és a $3y - x = 4$ egyenesek *C* metszéspontja $C(8;\,4)$

b) $AC = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104}$. Így a háromszög *K* kerülete:
$K = AB + 2AC = 4 + 2\sqrt{104}$.

14. *a)* Elkészíthetjük az alábbi táblázatot:

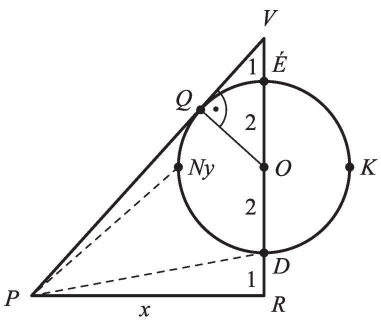
gyerekek száma:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
családok száma:	7	3	11	13	7	7	8	3	1	0

Az átlagos gyerekszám:

$$\frac{3 + 22 + 39 + 28 + 35 + 48 + 21 + 8}{60} = 3{,}4.$$

b) Az eredeti táblázat alapján 94 fiú és 110 lány van a megkérdezett családokban.

15.



15. *a)* *OQV* és *RPV* háromszögek hasonlók, hiszen mindkettő derékszögű és *V*-nél közös szögük van. Így írhatjuk:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{PV} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6^2}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{5}} \approx 5{,}36 \text{ km}.$$

b) $$PD = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{144}{5} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{149}{5}} \approx 5{,}459 \text{ km};$$

$$PNy = \sqrt{(x - 2)^2 + 3^2} \approx 4{,}5 \text{ km}.$$

Tehát a nyugati kapuhoz érdemes sietni.

16. *a)* $\dfrac{8!}{3!\cdot 4!}=\dfrac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{3!}=280.$

b) A kérdéses szám akkor osztható 4-gyel, ha 12-re vagy 24-re vagy 44-re végződik.

12-re végződőből van: $\dfrac{6!}{2\cdot 4!}=15$ db;

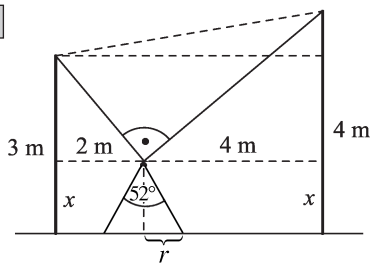
24-re végződőből van: $\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=20$ db;

44-re végződőből van: $\dfrac{6!}{2\cdot 3!}=60$ db.

Tehát a 4-gyel oszthatók száma: 15 + 20 + 60 = 95, így a keresett valószínűség: $\dfrac{95}{280}\approx 0{,}339.$

17. *a)* Pitagorasz tételének háromszori alkalmazásával:

17.



$(3-x)^2+2^2+(4-x)^2+4^2=(4-3)^2+6^2 \;\rightarrow\; x^2-7x+4=0,$

$x_1=6{,}37, \quad x_2=0{,}6277.$

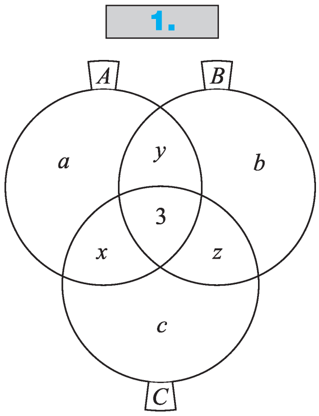
De nyilván $x<3$, így $x=0{,}6277$ m.

b) $\operatorname{tg} 26^\circ=\dfrac{r}{0{,}6277} \;\rightarrow\; r\approx 0{,}30615 \;\rightarrow\; T=r^2\pi\approx 0{,}2944\ \text{m}^2.$

Emelt szint

1. feladatsor

1. A halmazábra:



A feltételek szerint

$$x + y + z + 10 = a + b + c \quad \text{és} \quad b = 2a = \frac{c}{2}.$$

Az osztálylétszám:

$$a + b + c + x + y + z + 3 = 2(a + b + c) - 7 = 2(a + 2a + 4a) - 7 =$$
$$= 7(2a - 1).$$

Tehát az osztálylétszám osztható 7-tel, így csak a *c*) állítás lehet igaz.

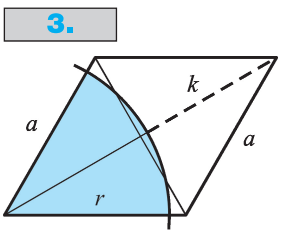
2. *a)* $a_1 = -2, \; a_2 = 3 \;\rightarrow\; d = 5.$

$$S_{100} = \frac{(-4 + 99 \cdot 5) \cdot 100}{2} = \ldots = 24\,550.$$

b) $10 \leq -2 + (n-1) \cdot 5 \leq 99 \;\rightarrow\; 4 \leq n \leq 21.$

Tehát a sorozatnak 18 db kétjegyű tagja van.

3. A 60°-os, r sugarú körcikk területe a rombusz területének a fele:



$$2 \cdot \frac{r^2 \pi}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; r = a\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}.$$

A kutya kötelének k hosszára:

$$k < a\sqrt{3} - r = 20\sqrt{3} - 20\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \approx 16{,}46 \text{ m}.$$

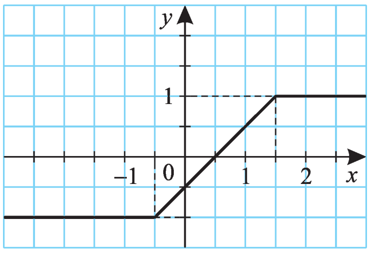
4. $f(x)=\dfrac{4x-2}{|2x+1|+|2x-3|}$.

Ha $x\geq\dfrac{3}{2}$, akkor $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x+1+2x-3}=1$.

Ha $-\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{3}{2}$, akkor $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x+1-2x+3}=\dfrac{4x-2}{4}=x-\dfrac{1}{2}$.

Ha $x<-\dfrac{1}{2}$, akkor $f(x)=\dfrac{4x-2}{-2x-1-2x+3}=-1$.

4.



5. *a)*

eladott termékek száma	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
üzletek száma	3	8	7	7	8	8	6	7	4	2

b) $\dfrac{3+16+21+28+40+48+42+56+36+20}{60}\approx 5,1666...$

c) Az *A* termékből 144 db-ot, a *B* termékből 166 db-ot adtak el.

A cég haszna:

$1240\cdot 0,22\cdot 144+1660\cdot 0,14\cdot 166=39\,283,2+38\,578,4=77\,861,6$ Ft.

6. *a)* Összesen $\dfrac{(n+3)!}{n!}$ szám képezhető.

A párosak száma: 2-re végződő: $\dfrac{(n+2)!}{n!}$, 4-re végződő: $\dfrac{(n+2)!}{n!}$.

Tehát a párosak száma:

$\dfrac{2(n+2)!}{n!}$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{2(n+2)!}{n!}\cdot\dfrac{n!}{(n+3)!}=\dfrac{2}{n+3}$.

b) 4-gyel azok oszthatók, melyek 12-re, 32-re vagy 24-re végződnek.

12-re végződők száma: $\dfrac{(n+1)!}{n!}=n+1$.

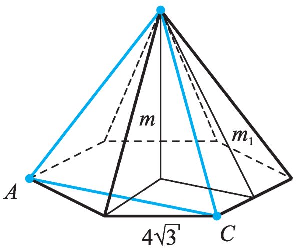
32-re végződők száma: $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$.

24-re végződők száma: $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$.

Tehát a 4-gyel oszthatók száma: $(n+1)(1+n+1) = (n+1)(n+2)$.

A megadott valószínűségre: $\dfrac{(n+1)(n+2)}{\dfrac{(n+3)!}{n!}} = \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{1}{8} \quad \rightarrow \quad n = 5$.

7.



7. *a)* $AC = 2 \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12$, tehát a gúla oldalélei is 12 hosszúak.

$m = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{6}$.

A légtér:

$V = 6 \cdot \dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = 288\sqrt{2} \approx 407$ m^3.

b) $m_1 = \sqrt{12^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{33}$.

A tetőszerkezet külső felülete: $A = 6 \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{33}}{2} \approx 238{,}8$ m^2.

A festés költsége: $238{,}8 \cdot 16\,000 \approx 3\,820\,800$ Ft.

8. *a)* $b^2 - 4ac = 2002$. Ekkor b páros kell, hogy legyen, azaz $b = 2k$. Ezzel $4k^2 - 4ac = 2002$.

Ez azonban lehetetlen, hiszen a bal oldal osztható 4-gyel, míg a jobb oldal nem.

$b^2 - 4ac = 2003$. Ekkor b páratlan, azaz $b = 2k + 1$. Ezzel

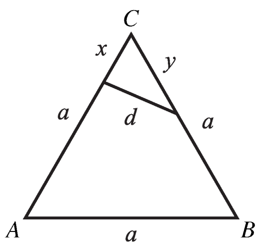
$4k^2 + 4k + 1 - 4ac = 2003$.

Ez sem lehetséges, mert a bal oldal 4-gyel osztva 1 maradékot ad, míg a jobb oldal 3-at.

b) Most b-nek páratlannak kell lennie. Válasszunk egy tetszőleges páratlan számot, melynek négyzete nagyobb 2005-nél. Legyen pl. $b = 45$.

Ekkor $45^2 - 4ac = 2005 \rightarrow ac = 5$, ahonnan pl. $a = 1$, $c = 5$

9.



9. *a)* Az *ábra* jelöléseivel:

$2(a - x) = a + y \rightarrow y = a - 2x$.

A koszinusztétellel:

$d^2 = x^2 + (a - 2x)^2 - 2 \cdot x \cdot (a - 2x) \cdot \cos 60° \rightarrow$

$\rightarrow d = \sqrt{7x^2 - 5ax + a^2}$.

A gyök alatti másodfokú alaknak akkor van minimuma, ha $x = \frac{5}{14}a$.

Ezzel

$$y = a - \frac{5}{7}a = 0,8\ \text{m}.$$

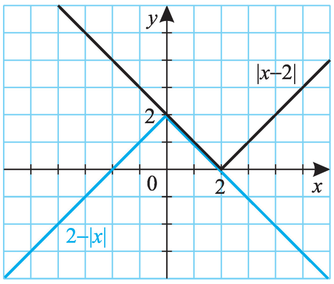
b) x és a értékét d kifejezésébe helyettesítve a legkisebb távolság:

$$\sqrt{7 \cdot \frac{25}{196} \cdot 2,8^2 - \frac{5 \cdot 2,8^2 \cdot 5}{14} + 2,8^2} \approx 0,9165\ \ \text{m}.$$

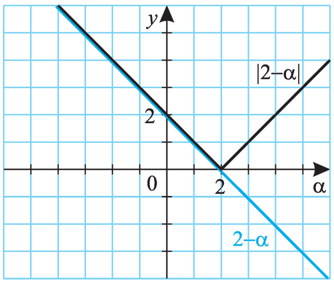
2. feladatsor

1. *a)* Ábrázoljuk mindkét oldalt grafikusan: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$.
Az egyenlőtlenség megoldása: $0 \le x \le 2$.
b) $x > 0$. Legyen $\lg x = \alpha$, ekkor $|\alpha - 2| = 2 - \alpha$.
Az egyenlőtlenség megoldása: $\alpha \le 2$, azaz $\lg x \le \lg 100$. Tehát ez esetben az egyenlőtlenség megoldása: $0 < x \le 100$.

1/a.



1/b.



2. A $2y - x = 5$ egyenes kérdéses pontját az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki ebből az egyenesből. AB felezőpontja: $F(2; 0)$. AB irányvektora: $v_{AB}(8; -2)$, ez egyben az AB felezőmerőlegesének egy normálvektora.

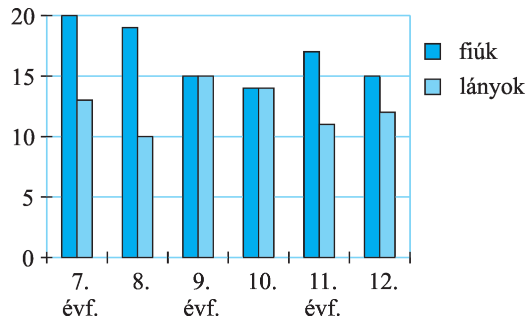
Ezek szerint AB felezőmerőlegesének egyenlete: $4x - y = 8$.

A $2y - x = 5$, $4x - y = 8$ egyenesek M metszéspontja: $M(3; 4)$.

Ennek a P ponttól való távolsága: $PM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

3. *a)*

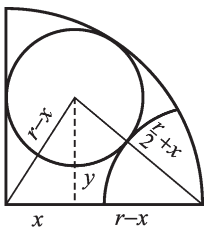
3/a.



b) Összes tanuló: 175, kollégista fiú: 54; $\frac{54}{175} \cdot 100 \approx 30{,}85\%$.

c) $\frac{\binom{28}{2}}{\binom{75}{2}} = \ldots = \frac{756}{5550} \approx 0{,}136$.

4.



4. Az *ábra* megfelelő derékszögű háromszögeire felírhatjuk Pitagorasz tételét:

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = (r-x)^2 + y^2 \quad \text{és} \quad y^2 = (r-x)^2 - x^2.$$

Innen az érintő kör keresett sugara:

$$x = \frac{7}{20} r = \frac{7}{20} \cdot 90 = 31{,}5 \text{ cm}.$$

5. *a)* Ha a, b, c számtani sorozat szomszédos tagjai, akkor

$$(b-d)x + by = b + d.$$

Ez az egyenes az x tengelyt $x = \frac{b+d}{b-d}$-ben, az y tengelyt $y = \frac{b+d}{b}$-ben metszi. A koordinátatengelyekkel alkotott háromszög területe:

$$\frac{(b+d)^2}{b(b-d)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \to \quad d^2 = -3bd \quad (d \neq 0) \quad \to \quad d = -3b.$$

Az egyenes egyenlete:

$$4bx + by = -2b, \quad \text{azaz} \quad 4x + y = -2.$$

b) Ha a, b, c mértani sorozat szomszédos tagjai:

$$\frac{b}{q}x + by = bq \;\rightarrow\; \frac{1}{q}x + y = q.$$

Ez az x, illetve y tengelyt $x = q^2$, illetve $y = q$-ban metszi. Tehát a háromszög területe ez esetben:

$$\frac{q^3}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad q = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a mértani sorozat csak állandó lehet, vagyis ezen kívül nincs olyan mértani sorozat, mely a feltételeknek megfelelne.

6. *a)* $\binom{42}{4} = \frac{42!}{2! \cdot 38!} = \ldots = 111\,930.$

b) $\binom{18}{2} \cdot \binom{24}{2} = \frac{18!}{2! \cdot 16!} \cdot \frac{24!}{2! \cdot 22!} = \ldots = 42\,228.$

c) Ha 2 nő van a bizottságban, akkor $17 \cdot \binom{24}{2}$, ha 3 nő van a bizottságban, akkor $\binom{24}{3}$. Tehát ez esetben a lehetőségek száma:

$$17 \cdot \binom{24}{2} + \binom{24}{3} = \ldots\ldots = 6716.$$

7. $\sin x \cos y + \cos x \sin y \geq \cos x \cos y + \sin x \sin y,$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y \geq 0,$

$\sin x(\cos y - \sin y) + \cos x(\sin y - \cos y) \geq 0,$

$(\cos y - \sin y)(\sin x - \cos x) \geq 0.$

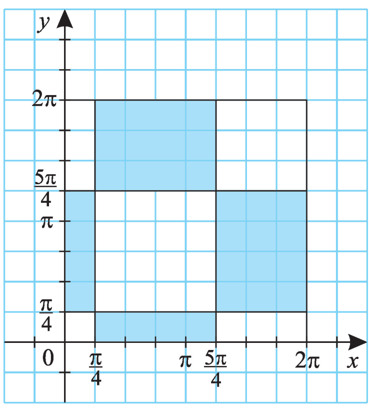
Innen

$\cos y \geq \sin y$ és $\sin x \geq \cos x$ vagy

$\cos y \leq \sin y$ és $\sin x \leq \cos x$

A keresett ponthalmaz *(ábra):*

7.



8. *a)* A rakétát a $t = 0$ pillanatban lőtték ki, tehát annak a földtől való távolsága:

$f(0) = 10$ km.

b) Az $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 10$ függvény $-\infty$-től az első szélsőértékhelyig szigorúan monoton növekvő. Így az első szélsőértéke (ha van) biztosan maximum. A szélsőértékhelyét a derivált segítségével kapjuk meg.

$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$

Ha $f'(t) = 0$, azaz $3t^2 - 12t + 9 = 0$,

akkor $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.
Mivel a függvényt – a megfigyelés időtartamát figyelembe véve – a [0; 5] intervallumban vizsgáljuk, így $t = 1$-ben helyi maximuma, $t_2 = 3$-ban pedig helyi minimuma van, azaz
$t = 0$-tól $t = 1$-ig szig. monoton növekvő,
$t = 1$-től $t = 3$-ig szig. monoton csökken,
$t = 3$-tól $-\infty$-ig szig. monoton növekvő.
A helyi maximum értéke $t = 1$-ben: $f(1) = 1 - 6 + 9 + 10 = 14$ km.
Meg kell még vizsgálnunk, hogy a [0; 5] intervallum felső határában mekkora a függvényérték:

$$f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 10 = 30 \text{ km.}$$

Tehát a rakéta a vizsgált időszakban legtávolabb a vizsgálat utolsó pillanatában, azaz a 60. perc végén volt, mégpedig 30 km távolságra.

c) Azt kell megvizsgálnunk, hogy a $t = 3$-ban mennyi a minimum értéke:

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 10 = 10 \text{ km.}$$

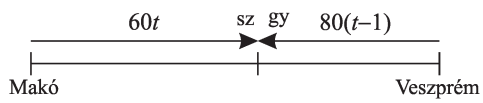
Tehát a földhöz legközelebb a kilövés pillanatában, valamint $t = 3$-ban, azaz a 36. perc végén lesz a rakéta, mégpedig 10 km távolságra. Ezek szerint a 7000 m magasságig érzékelő radar egyetlen pillanatban sem észlelhette ezt a rakétát.

9. *a*) $k^2 p - 11k = k(kp - 11) =$ prím.
E két tényezős szorzat csak úgy lehet prím, ha valamelyik tényezője 1, a másik pedig prím.
Ha $k = 1$, akkor $p - 11 =$ prím. Ez csak akkor teljesül, ha a jobb oldal értéke 2, ahonnan $p = 13$.
Ha $kp - 11 = 1$, akkor k-nak prímnek kell lennie és $kp = 12$. Ez akkor teljesül, ha $p = 2$, $k = 6$ vagy $p = 3$, $k = 4$. De egyik esetben sem lesz k értéke prím, így a feltételeknek eleget tevő egyetlen számpár: $k = 1$, $p = 13$.

b) $k^2 - 12k + 5 = n^2$,
$(k - 6)^2 - 36 + 5 = n^2$,
$(k - 6)^2 - n^2 = 31$,
$(k - 6 - n)(k - 6 + n) = 31$.
Innen $k - 6 - n = 1$ és $k - 6 + n = 31$,
Azaz $2k - 12 = 32 \rightarrow k = 22$.

3. feladatsor

1. *a)*

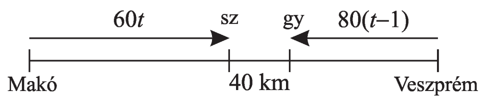


1/a.

$60t + 80\,(t-1) = 270 \quad \rightarrow \quad t = 2,5$ óra.

Tehát 10 óra 30 perckor találkoznak Makótól 150 km-re.

b) A beszélgetés kezdetére

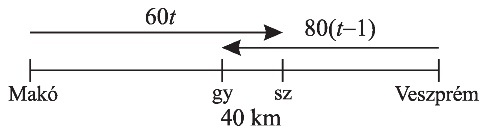


1/b1.

$60t + 80\,(t-1) + 40 = 270 \quad \rightarrow \quad t \approx 2,2$ óra.

Tehát a beszélgetés kezdete: 10 óra 12 perc.

A beszélgetés végére:



1/b2.

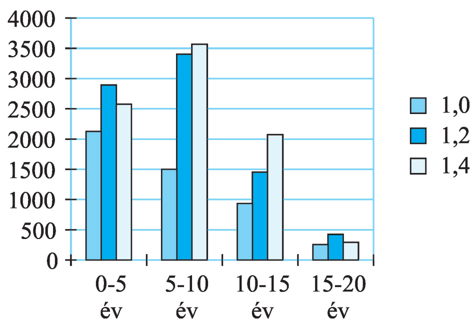
$60t + 80\,(t-1) - 40 = 270 \quad \rightarrow \quad t \approx 2,78$ óra.

Tehát a beszélgetés vége kb. 10 óra 46 perc. A beszélgetés időtartama: kb. 34 perc.

2. *a)* Az összes autók száma: 21 653, a kombik száma: 9435. A keresett százalék:

$$\frac{9\,435}{21\,653} \cdot 100 \approx 43,57\%.$$

b)



2/b.

c) $$\frac{7547 \cdot 2,5 + 8645 \cdot 7,5 + 4557 \cdot 12,5 + 904 \cdot 17,5}{21\,653} \approx 7,22 \text{ év.}$$

3. *a)* A 4-gyel osztható négyjegyű számokra $a_1 = 1000$, $d = 4$, $a_n = 9996$.

$$9996 = 1000 + (n-1)\cdot 4 \;\rightarrow\; n = 2250.$$

Az 5-tel osztható négyjegyű számokra: $a_1 = 1000$, $d = 5$, $a_n = 9995$.

$$9995 = 1000 + (n-1)\cdot 5 \;\rightarrow\; n = 1800.$$

b) $2250 + 1800 = 4050$.

Az $A \cap B$ halmazba a 20-szal osztható számok vannak. Ezek számára:

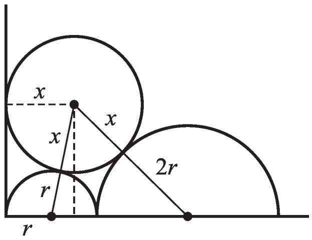
$a_1 = 1000$, $d = 20$, $a_n = 9980$.

$$9980 = 1000 + (n-1)\cdot 20 \;\rightarrow\; n = 450.$$

Ezekből azonban kettő van az urnában. Így a keresett valószínűség:

$$\frac{900}{4050} \approx 0,\dot{2}.$$

4.



4. Az *ábra* megfelelő derékszögű háromszögeire

$$(r+x)^2 - (x-r)^2 = (2r+x)^2 - (4r-x)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \frac{3}{2}r = \frac{3}{2}\cdot 12 = 18 \text{ cm}.$$

5. *a)* Az egyenes egyenletéből $x = 2y - 10$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:

$$(2y-10)^2 + y^2 - 6(2y-10) - 8y = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 4,\; y_2 = 8.$$

Az egyenes és a kör M metszéspontjai: $M_1(-2; 4)$, $M_2(6; 8)$.

E két pont d távolsága: $d = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$.

b) Azon pontok halmaza, melyekből a körhöz húzott érintők merőlegesek egymásra, egy olyan körön vannak, melynek középpontja azonos az eredeti kör középpontjával, sugara pedig az eredeti kör sugarának $\sqrt{2}$-szerese, Tehát az ilyen pontok az

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (5\sqrt{2})^2$$

egyenletű körön vannak. E körnek és az adott egyenesnek a metszéspontjait az egyenletrendszer megoldása adja:

$$(2y-10)^2 + y^2 - 6(2y-10) - 8y - 25 = 0 \;\rightarrow\; y^2 - 12y + 27 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow y_1 = 9,\; y_2 = 3.$$

Az egyenes keresett pontjai: $(8; 9)$, $(-4; 3)$.

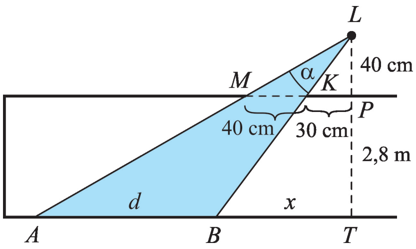
6. *a)* A KPL és BTL háromszögek hasonlók, így

$$\frac{0,3}{0,4}=\frac{x}{3,2} \rightarrow x=2,4 \text{ m.}$$

Az MPL és ATL háromszögek szintén hasonlók, így

$$\frac{d+2,4}{3,2}=\frac{0,7}{0,4} \rightarrow d=3,2 \text{ m.}$$

6/a.



b) $\operatorname{tg} MLP\sphericalangle=\frac{7}{4} \rightarrow MLP\sphericalangle \approx 60,25°.$

$\operatorname{tg} KLP\sphericalangle=\frac{3}{4} \rightarrow KLP\sphericalangle \approx 36,87°.$

$\alpha = MLP\sphericalangle - KLP\sphericalangle \approx 23{,}38°.$

7. *a)* A háromszögek száma: $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 = = \frac{6 \cdot 5! \cdot 5}{2 \cdot 3!}=300.$

A négyszögek száma: $3 \cdot \binom{5}{2}^2 = \frac{3 \cdot 5! \cdot 5!}{2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 3!}=300.$

Tehát ugyanannyi háromszög van, mint négyszög.

b) A háromszögek száma: $2 \cdot \binom{6}{2} \cdot 5 + 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 6 + 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 = \ldots = 370.$

A négyszögek száma: $2 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{2}^2 = \ldots = 400.$

Tehát *b)* esetben négyszögből van több.

8. *a)* $a_1=a, \quad a_2=b, \quad a_3=\frac{b}{a}, \quad a_4=\frac{1}{a}, \quad a_5=\frac{1}{b}, \quad a_6=\frac{a}{b}, \quad a_7=a, \quad a_8=b.$

Innen kiolvasható, hogy a sorozat tagjai hatosával periodikusan ismétlődnek. Így

$$a_{2002}+a_{2003}+a_{2005}+a_{2006}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+a+b.$$

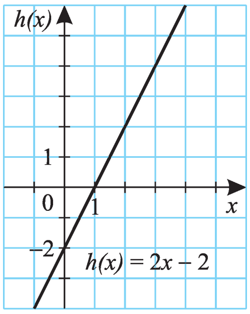
A jobb oldalon egy-egy pozitív számnak és reciprokának összegei szerepelnek, így ez az összeg valóban legalább 4.

b) Ha $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+a+b=n$, akkor $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=k$ egész. Ez azonban csak akkor teljesül, ha $a=b=1$ vagy $a=b=2$.

9. *a)* A feltételek szerint az $f'(x_0) \cdot g'(x_0)=-1$ egyenletnek egy megoldása van.

$(2x_0+a)(2x_0+b)=-1, \quad$ azaz $\quad 4x_0^2+2x_0(a+b)+ab+1=0.$

9/a.



Ez utóbbi egyenletnek akkor és csak akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0.

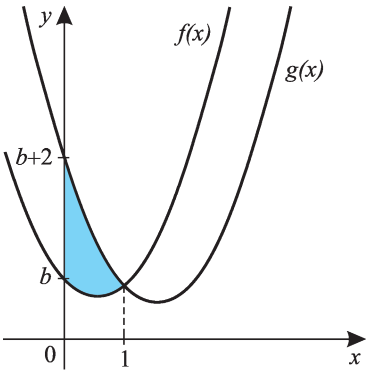
$4(a+b)^2 - 16(ab+1) = 0$, ahonnan $(a-b)^2 = 4$.

Mivel $a > b$, ezért innen $a - b = 2$, vagyis $a = b + 2$. Ezzel

$h(x) = x^2 + (b+2)x + b - x^2 - bx - b - 2 = 2x - 2.$

b) A két függvény $x = 1$-ben metszi egymást, ha $x < 1$, akkor $g(x) > f(x)$. A keresett területet az alábbi fiktív *ábra* szemlélteti.

9/b.



$$\int_0^1 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 (x^2 + bx + b + 2 - x^2 - bx - 2x - b)dx =$$

$$= \int_0^1 (2 - 2x)dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = (2-1) - (0) = 1.$$